Devoir sur Table 1

Durée : 4h

- Tous les documents sur papier sont interdits.
- Les calculatrices ne sont pas autorisées.
- Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
- La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
- Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
- Mettez en évidence vos résultats en les encadrant.
- Conformément au règlement de la Banque PT
  - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
  - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(Mines d'Albi, Alès, Douai et Nantes 2009)

Partie I — Étude de deux applications

La notation $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On définit les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

On rappelle aussi que l'on note $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = f \circ f^{n-1}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que φ est linéaire.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$, en indiquant les calculs intermédiaires.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?
5. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$. Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$?
6. L'application φ est-elle injective ? surjective ?

Partie II — Calcul des puissances successives d'une matrice

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}'$ la famille de $\mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$\mathcal{B}' = (1, -2X + 1, 6X^2 - 6X + 1).$$

7. Justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
8. Écrire la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
9. Justifier que Q est inversible et calculer son inverse.
10. Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$ en donnant les calculs intermédiaires.
11. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On explicitera les neufs coefficients de A^n.
12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b, c.
13. En déduire que
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \ \lim_{n \to +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2

(Oral Banque PT)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de six boules numérotées de 1 à 6.

Au début de l'expérience, il y a deux boules dans U_1 et quatre dans U_2.

On dispose également d'un dé équilibré à six faces. À chaque étape on va lancer le dé puis on change d'urne la boule portant le même chiffre que le dé.

Soit X_n la variable aléatoire qui représente le nombre de boules dans U_1 après le lancer n.

1. Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 6)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 5)$.
4. Soit $k \in [\![1, 5]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de la loi de X_n.
5. Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n)$.
6. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et la limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

(Mines d'Albi, Alès, Douai et Nantes 2009)

On rappelle que l'on définit les fonction sinus hyperbolique sh, cosinus hyperbolique ch et tangente hyperbolique th par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$$

Partie I — Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Étudier la parité de f.
2. (a) Rappeler un équivalent de la fonction sh en 0 et en déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(b) Déterminer la limite de f en 0.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = \left(\text{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) \times \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$
4. Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\text{th}(y) < y$.
5. En déduire le tableau de variations de f.
6. Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{sh}(x)}{x}$.
7. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet un développement de la forme
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$
où $a_0, \ldots, a_4$ sont cinq réels que l'on précisera.
8. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée F, puis prouver que F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie II — Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) suivante, que l'on va résoudre sur différents intervalles

$$xy' + y = \text{ch}(x). \qquad (E)$$

9. Résoudre sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E).
10. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.
11. Justifier que la fonction F (définie dans la question 8) est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui soit solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

Partie III — Étude d'une suite

12. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation
$$f(x) = \frac{n+1}{n}$$
admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On la note u_n.

On définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on va étudier dans les questions qui suivent.

13. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
14. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
15. En utilisant la question 7, déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie IV — Une fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $J(x) = \displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(2x) = 2\,\text{ch}(x)\,\text{sh}(x)$.
17. Justifier que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$J'(x) = f(x)\left[1 - \frac{1}{2}\,\text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$
18. En déduire le signe de J' sur $\mathbb{R}_+^*$; on exprimera le (ou les) zéro(s) de J' à l'aide de la fonction ln.
19. *On <u>admet</u> les résultats suivants :*
(*) $\lim\limits_{x\to 0^+} J(x) = +\infty$,
(*) $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = +\infty$ *et J admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation* $y = \dfrac{x}{2}$,
(*) la courbe représentative de J est toujours « au dessus »de l'asymptote précédente.
Donner le tableau de variations de J sur $\mathbb{R}_+^*$.
20. Tracer l'allure de la courbe représentative de J.
On donne pour le tracé : $\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})} \approx 0,76$ *et* $J\left(\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right) \approx 0,65$ *à 10^{-2} près.*

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

Partie I — Étude de deux applications

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors : $\deg P\left(\frac{X}{2}\right) \leqslant 2$ et $\deg P\left(\frac{X+1}{2}\right) \leqslant 2$ donc

$$\deg(f(P)) \leqslant \max\left(\deg\left(P\left(\frac{X}{2}\right)\right), \deg\left(P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right)\right) \leqslant 2$$

et donc :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) \in \mathbb{R}_2[X].$$

Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= \frac{1}{2}\left((\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X}{2}\right) + (\lambda P + \mu Q)\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + \mu Q\left(\frac{X}{2}\right) + \lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + \mu Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\lambda}{2}\left(P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) + \frac{\mu}{2}\left(Q\left(\frac{X}{2}\right) + Q\left(\frac{X+1}{2}\right)\right) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q), \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est linéaire, et donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$

2. De la même manière, pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$ et tout couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q),$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

3. On a : $f(1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$, $f(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}X$ et :

$$f\left(X^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X+1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{4} + \frac{X^2+2X+1}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2,$$

D'où, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

4. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls. Ainsi elle est inversible. On en déduit que $\boxed{f \text{ est bijective, donc injective et surjective.}}$

5. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ si et seulement si $P(1) = 0$ donc si et seulement si $(X-1)$ divise P.

Or, puisque $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il s'écrit alors $P = (X-1)(aX+b) = a(X-1)X + b(X-1)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X(X-1), X-1)$. La famille $(X(X-1), X-1)$ est libre car échelonné en degrés.

Donc $\boxed{\text{une base de } \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ est } (X-1, (X-1)X)}$ et $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 2.}$

6. Puisque $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{0\}$, $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective.}}$

   D'après le théorème du rang, on a l'égalité :

   $$\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

   D'où $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 3 - 2 = 1 = \dim(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\varphi \text{ est surjective.}}$

Partie II — Calcul des puissances successives d'une matrice

7. La famille $\mathcal{B}'$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ échelonnée en degré, elle est donc libre.
   De plus, elle est de cardinal 3 et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.

   Ainsi $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$

8. Par définition de la famille $\mathcal{B}'$, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est

   $$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$$

9. La matrice Q est une matrice de passage entre deux bases, $\boxed{\text{elle est donc inversible.}}$

   On inverse Q par la méthode du pivot de Gauss, ce qui donne

   $$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

10. La formule de changement de base s'écrit :

    $$M = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

    d'où :

    $$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

11. Puisque M est diagonale, on en déduit que :

    $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}$$

    De plus, on a : $A = QMQ^{-1}$ et donc, par une récurrence immédiate

    $$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = QM^nQ^{-1}$$

On en déduit après calcul que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & \frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}}$$

12. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$A^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6 \times 4^n}\right) c \\ \frac{1}{2^n} b + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) c \\ \frac{1}{4^n} c \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{f^n(P) = \left(a + \frac{b}{2} - \frac{b}{2^{n+1}} + \frac{c}{3} - \frac{c}{2^{n+1}} + \frac{c}{6 \times 4^n}\right) + \left(\frac{b}{2^n} + \frac{c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right) X + \frac{c}{4^n} X^2}$$

13. On a alors

$$\varphi\left(f^n(P)\right) = a + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{c}{3} - \frac{c}{2^{n+1}} + \frac{c}{6 \times 4^n}\right) + \frac{b}{2^n} + \left(\frac{c}{2^n} - \frac{c}{4^n}\right) + \frac{c}{4^n}$$

D'où

$$\varphi\left(f^n(P)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

Or

$$\int_0^1 P(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(a + bt + ct^2\right) \mathrm{d}t = \left[at + b\frac{t^2}{2} + c\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3},$$

Ainsi

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \lim_{n \to +\infty} \varphi\left(f^n(P)\right) = \int_0^1 P(t) \mathrm{d}t}$$

Corrigé de l'exercice 2

1. Au début de l'expérience, il y a deux boules dans U_1 et quatre dans U_2.

   Si on tire l'un des numéros de l'un des boules présentes dans U_1 alors $X_1 = 1$ et si on tire un des numéros d'une des boules de U_2 alors $X_1 = 3$.

   Ainsi on a $\boxed{X_1(\Omega) = \{1, 3\}}$ et

   $$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 3) = \frac{2}{3}}$$

   On en déduit

   $$\boxed{\mathbb{E}(X_1) = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3}}$$

2. X_{n+1} ne peut valoir 0 que si $X_n = 1$.

   Si $X_n = 1$ alors X_{n+1} vaut 0 si et seulement si on tire le numéro de la seule boule présente dans U_1. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n = 1)}$.

3. X_{n+1} ne peut valoir 6 que si $X_n = 5$.
   Si $X_n = 5$ alors X_{n+1} vaut 6 si et seulement si on tire le numéro de la seule boule présente dans U_2. Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1} = 6) = \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n = 5)}$.

4. Soit $k \in [\![1, 5]\!]$.
   D'après la formule des probabilités totales on a

   Lien entre X_n et X_{n+1}
   On a $\mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_n = i) = 0$ si $i \notin \{k-1, k+1\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^{6} \mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_n = i)\mathbb{P}(X_n = i) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_n = k-1)\mathbb{P}(X_n = k-1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_n = k+1)\mathbb{P}(X_n = k+1) \\ &= \frac{6-(k-1)}{6}\mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6}\mathbb{P}(X_n = k+1) \\ &= \frac{7-k}{6}\mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6}\mathbb{P}(X_n = k+1)\end{aligned}$$

   On a donc

$$\boxed{\forall k \in [\![1, 5]\!], \qquad \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{7-k}{6}\mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6}\mathbb{P}(X_n = k+1)}$$

5. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}) &= 0\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + 6\mathbb{P}(X_{n+1} = 6) + \sum_{k=1}^{5} k\mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 5) + \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{7-k}{6}\mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6}\mathbb{P}(X_n = k+1)\right) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 5) + \sum_{k=1}^{5} \frac{k(7-k)}{6}\mathbb{P}(X_n = k-1) + \sum_{k=1}^{5} \frac{k(k+1)}{6}\mathbb{P}(X_n = k+1) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 5) + \sum_{k=0}^{4} \frac{(k+1)(6-k)}{6}\mathbb{P}(X_n = k) + \sum_{k=2}^{6} \frac{k(k-1)}{6}\mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 5) - \mathbb{P}(X_n = 5) - 0\mathbb{P}(X_n = 6) - 0\mathbb{P}(X_n = 0) - 0\mathbb{P}(X_n = 1) \\ &\qquad + \sum_{k=0}^{6} \frac{(k+1)(6-k)}{6}\mathbb{P}(X_n = k) + \sum_{k=0}^{6} \frac{k(k-1)}{6}\mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{6} \frac{5k - k^2 + 6 + k^2 - k}{6}\mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{6} \frac{4k+6}{6}\mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{6} \mathbb{P}(X_n = k) + \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{6} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n)\end{aligned}$$

   On a donc bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n)}$$

6. La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
   Posons $r = 3$ de sorte que $r = 1 + \frac{2}{3}r$, on a alors

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) - r = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) - \left(1 + \frac{2}{3}r\right) = \frac{2}{3}\left(\mathbb{E}(X_n) - r\right)$$

La suite $(\mathbb{E}(X_n)-3)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, on a donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \mathbb{E}(X_n)=3+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(\mathbb{E}(X_1)-3)$$

i.e.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad \mathbb{E}(X_n)=3-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}$$

Puis $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)=3}$.

Corrigé de l'exercice 3

Partie I — Étude d'une fonction

1. Si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $(-x)\in\mathbb{R}^*$ et :

$$f(-x)=(-x)\operatorname{sh}\left(-\frac{1}{x}\right)=x\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)=f(x),$$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$

2. (a) On sait que $\operatorname{sh}x\underset{x\to0}{\sim}x$, donc $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$. On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=1.}$$

(b) Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on peut écrire :

$$f(x)=x\frac{\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}}{2}=x\mathrm{e}^{1/x}\frac{1-\mathrm{e}^{-2/x}}{2}.$$

Or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=-\infty$ donc, par composition : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\mathrm{e}^{-2/x}=0$. Il s'ensuit que :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1-\mathrm{e}^{-2/x}}{2}=\frac{1}{2}}$$

Et, d'autre part (avec le changement de variable $u=\dfrac{1}{x}$)

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x\mathrm{e}^{1/x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^u}{u}=+\infty$$

par croissances comparées. Donc, par produit et parité :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)$$

et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty}$.

0^+ et 0^-

La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ a des comportements différents en 0^+ et en 0^-. Pour conclure quant à la limite de f en 0 il est alors nécessaire soit d'étudier les limites à gauche et à droite, soit ici d'invoquer un argument de parité.

3. Par composée et produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad f'(x)=\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)+x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

d'où, en factorisant par $\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui n'est pas nul :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f'(x)=\left(\operatorname{th}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right)\times\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right).$$

> **Remarque**
> On pouvait aussi étudier la fonctions $x \mapsto \text{th}(x) - x$.

4. On sait que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction th est dérivable sur $[0, y]$ donc, d'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]0, y\,[, \quad \text{th}(y) - \text{th}(0) = \text{th}'(c)(y-0) \quad \text{soit :} \quad \text{th}(y) = \left(1 - \text{th}^2(c)\right) y.$$

Or, th est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]0, 1\,[$, donc $\text{th}(c) \in]0, 1[$ ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \text{th}(y) < y}$$

5. On déduit de la question précédente que, pour tout $x > 0$, $\text{th}\left(\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}$. Ainsi, f' est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où, en exploitant la parité, le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	‖	$-$	
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

6. On a le développement limité :

$$\text{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \text{o}\left(x^5\right),$$

$$\boxed{\frac{\text{sh}(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \text{o}\left(x^4\right)}$$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, ainsi

$$\boxed{f(x) \underset{\pm\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + \text{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)}$$

8. La fonction $x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\text{sh}\, x}{x}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, au voisinage de 0 :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+}{=} 1 + \frac{x^2}{6} + \text{o}\left(x^2\right),$$

ce qui permet d'affirmer que la fonction $x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0. De plus cette fonction est aussi dérivable en 0 puisqu'elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Plus précisément, $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$.

Partie II — Une équation différentielle

9. Résolvons l'équation : $xy' + y = \text{ch}\, x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Résolution de l'équation homogène :

     Sur $]0, +\infty[$ l'équation $xy' + y = 0$ peut se réécrire $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto C\text{e}^{-\ln x} = \dfrac{C}{x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
   - Recherche d'une solution particulière : on utilise la méthode de la variation de la constante.

     On cherche une solution de la forme $y : x \mapsto \dfrac{C(x)}{x}$. On a alors, pour $x > 0$, $y'(x) = \dfrac{C'(x)}{x} - \dfrac{C(x)^2}{x}$ et donc $xy'(x) + y(x) = C'(x)$

     Il nous suffit ainsi de prendre $C(x) = \text{sh}(x)$.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\boxed{\left\{x \mapsto \frac{C+\text{sh}(x)}{x}\ ,\ C \in \mathbb{R}\right\}}$$

10. De même l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\boxed{\left\{x \mapsto \frac{K+\text{sh}(x)}{x}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}}$$

11. Pour qu'une fonction y soit solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elle soit solution sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et qu'elle soit de plus définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $y(0) = 1$.

Un telle fonction est alors nécessairement de la forme

$$y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{C+\text{sh}(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{K+\text{sh}(x)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{avec } (C, K) \in \mathbb{R}^2$$

Or, on sait $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sh}(x)}{x} = 1$ et que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0. Aussi, pour que y soit solution de (E) il faut que $C = K = 0$, et donc que $y = F$.

Réciproquement, F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. De plus, $F(0) = 1$ donc F vérifie bien l'équation (E) en 0.

Finalement $\boxed{F \text{ est la seule solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Partie III — Étude d'une suite

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{n+1}{n} \in]1, +\infty[$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]1, +\infty[$, on notera g sa bijection réciproque.

En particulier $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'équation } f(x) = \dfrac{n+1}{n} \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+^*.}$

13. On sait que une fonction et sa bijection réciproque possèdent le même sens de variation on en déduit que g est strictement décroissante. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$.

Par monotonie de g on en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant g\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$

En d'autres termes $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

14. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Ainsi, si elle est majorée elle converge et si elle n'est pas majorée elle diverge vers $+\infty$.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit majorée et qu'elle converge donc vers un réel ℓ.

Par continuité de f on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(u_n) = \dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi $f(\ell) = 1$ ce qui est absurde. On en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

15. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on peut écrire :

$$1 + \frac{1}{n} = f(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{6u_n^2} + \text{o}\left(\frac{1}{u_n^2}\right)$$

On en déduit donc que $6n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et ainsi

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{6}}}$$

Partie IV — Une fonction définie par une intégrale

16. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{sh}(2x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \frac{(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{2\operatorname{ch}(x) \times 2\operatorname{sh}(x)}{2}$$

donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)}$$

17. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet des primitives sur cet intervalle. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{x}{2} < x$ et $\left[\frac{x}{2}, x\right] \subset \mathbb{R}_+^*$. Si φ est l'une des primitives de f sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad J(x) = \varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$$

On peut donc en déduire que $\boxed{J \text{ est dérivable}}$ et, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} J'(x) &= \varphi'(x) - \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= x\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{4}\operatorname{sh}\left(\frac{2}{x}\right) \\ &= x\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= f(x)\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad J'(x) = f(x)\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

18. On sait que, sur $\mathbb{R}_+^*$, f est strictement positive. De plus

$$1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) < 2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{1/x} + \mathrm{e}^{-1/x} < 4 \;\Leftrightarrow\; \left(\mathrm{e}^{1/x}\right)^2 - 4\mathrm{e}^{1/x} + 1 < 0.$$

Considérons le polynôme $X^2 - 4X + 1$. Son discriminant est : $\Delta = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0$, donc il possède deux racines

$$\alpha = 2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad \beta = 2 - \sqrt{3} = \frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{\alpha}$$

On en déduit donc, puisque $\alpha > 1$:

$$1 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\alpha} < \mathrm{e}^{1/x} < \ln\alpha \;\Leftrightarrow\; -\ln\alpha < \frac{1}{x} < \alpha \;\Leftrightarrow\; x > \frac{1}{\ln\alpha}$$

Ainsi $\boxed{J'(x) > 0 \text{ si et seulement si } x > \dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}}$.

19. On en déduit le tableau de variations

x	0		$\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}$		$+\infty$
J'	‖	$-$	0	$+$	
J	$+\infty$	↘	$J\left(\dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{3})}\right)$	↗	$+\infty$

Fonction définie par une intég

Attention à ce type de fonction définie par un intégrale lorsque les deux bornes dépendent de x. On ne peut pas directement appliquer le théorème fondamental de l'analyse, il faut repasser par la différence de valeurs d'une primitive.

20. Avec toutes les informations obtenues on en déduit le tracé suivant :

Figure 1 – Tracé de la fonction J

